**¿Por qué tenemos un producto punto y un producto cruz?**

// NOTA: Este guion fue escrito hace mucho tiempo, hay que actualizarlo un poco

// El guion está muy largo, mucho blablá. Ir al grano, acortar el guion

Hola gente, ¿cómo están? En este video voy a explicar el producto punto y el producto cruz entre dos vectores.

En el colegio aprendemos qué son los vectores: los aprendemos como una lista de números que se puede representar con una flecha que tiene magnitud, dirección y sentido. Aprendemos cómo operar con ellos: sumarlos entre sí, multiplicarlos por un escalar, y dos operaciones bien particulares: el producto punto y el producto cruz.

El producto punto consiste en multiplicar componente por componente los vectores, y sumar cada producto para obtener un solo escalar. Pero también es el resultado demultiplicar las magnitudes de los vectores entre sí y con el coseno del ángulo que forman. Extraño, ¿no?

Y el producto cruz es incluso más raro: si tenemos los tres vectores unitarios y ortogonales i tongo, j tongo y k tongo, este producto obedece estas reglas: cada vector unitario cruz consigo mismo es 0, i cruz j es igual a k, j cruz k es igual a i, k cruz i es igual a j, y si inviertes el orden de los factores se alterna el signo del resultado. ¡Rarísimo! Y aun peor, el resultado del producto cruz es otro vector, PERPENDICULAR a los otros dos vectores, y cuya magnitud es igual al producto de las magnitudes de los vectores y el SENO del ángulo que forman, que RESULTA SER el área del paralelogramo abarcado por los dos primeros vectores.

Ok, aquí pueden haber muchas preguntas. ¿POR QUÉ? ¿Por qué definimos los productos así? ¿Cómo resultan ser el producto de las magnitudes de los vectores con el seno o el coseno del ángulo que forman? ¿Y cómo terminan siendo tan útiles, en física por ejemplo, donde tenemos el trabajo como el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento, el campo magnético proporcional al producto cruz entre el campo eléctrico y la velocidad de una carga, etc.

Y es en este video, donde voy a responder esas preguntas. Y para poder responder todo eso, tenemos que regresar al origen de los vectores, al lugar en donde nacieron: los cuaterniones.

Los cuaterniones son una extensión en 4 dimensiones de los números complejos desarrollada por William Rowan Hamilton desde 1843. En un video anterior, "La esencia de los números complejos: las rotaciones", mencioné que rotar un objeto en 180° es lo mismo que invertirlo, o sea multiplicarlo por -1. Y rotar en 180 es lo mismo que rotar 90° dos veces, así que una rotación en 90° al cuadrado sería igual a -1. Entonces, si sacamos raíz cuadrada, resulta que una rotación en 90° sería raíz de -1. Pero, ¿cuál de todas las rotaciones? Porque hay infinitas maneras en las que puedes rotar en 90°, todas en diferentes direcciones y ángulos, ¿así que cuál de todas esas escogemos? Resulta que todas son igual de válidas, y todas serían raíces de -1, porque al elevarlas al cuadrado hacen lo mismo que multiplicar por -1.

Ahora, si nos restringimos a un plano, entonces nos quedan solo dos maneras de rotar en 90°: o lo hacemos en sentido horario, o lo hacemos en sentido antihorario. Nosotros tomamos una de estas, el sentido antihorario, y le pusimos un nombre, un carnet de identidad: i. Por ende, a la otra le llamamos -i.

Pero, ¿qué pasa si queremos salir del plano? ¿qué pasa si queremos extendernos al espacio 3D? Hamilton, lo que hizo, fue escoger una nueva rotación en 90°: un valor que estuviera en un nuevo eje, perpendicular a los ejes real e imaginario. A esta rotación le llamó j. Esta j tendría la misma propiedad que i: j² = -1. En este nuevo sistema en 3D, habitarían los números de la forma a + bi + cj. Ahora que ya tenía su sistema en 3D, quiso hacer operaciones con los elementos de este espacio, pero al multiplicar y dividir estos números entre sí, se encontró un gran problema.

Al multiplicar dos números 3D, aparecían términos con los productos ij y ji, y Hamilton no hallaba qué hacer con ellos. ¿Cómo se suponía que debía representarlos? ¿A qué equivalen? Sin esa respuesta, le era imposible dividir estos números 3D, o encontrar el recíproco de un número.

Y ese no era el único problema. Los números complejos respetaban una regla importante: el módulo de un producto de complejos, era el producto de los módulos de cada complejo. Y la idea es que eso también se respete en el nuevo sistema que proponía Hamilton. Pero estos términos ij y ji simplemente arruinaban todo. Partamos con un ejemplo simple: tomemos el número raiz(2)/2 (i + j). Este número es imaginario, y su norma es raíz de 1/2 + 1/2 = 1. Así que representa una rotación en 90° que está justo a la mitad entre i y j. Por ende, aplicar esta rotación dos veces en teoría debería dar -1. Pero si tomamos el cuadrado de este número y lo desarrollamos, nos queda 1/2(i² + ij + ji + j²). Sabiendo que i² = -1 y j² = -1, nos queda la expresión -1 + 1/2(ij + ji). Y ahí están ij y ji molestando.

Para casos como este, Hamilton pensó que, bueno, tal vez ij y ji son iguales a 0. Y en ese caso la expresión se reduciría a -1, que es lo que buscamos. Pero esto no lo convencía. Para multiplicaciones entre cualquier pareja de números 3D en general, pensar así todavía le traía problemas, en especial porque esta regla del módulo del producto todavía no funcionaba.

Y fue entonces, cuando se le ocurrió una idea loca. ¿qué tal si ij no es igual a ji, sino opuesto? ¿qué tal si ij es igual a -ji? Esto era una locura, porque rompía con la idea de que el producto entre dos números es conmutativo. Pero resulta que esta locura funcionó muy bien. Hamilton tomó el producto ij y lo llamó "k". Y lo interesante, es que k al cuadrado es igual a ij al cuadrado. Pero ij es igual a -ji, así que esto se puede reescribir como ij por -ji. La j y la -j se multiplican y dan 1. Luego, ambas i se multiplican y el resultado da -1. k al cuadrado es igual a -1, ¡y eso significa que k es otra raíz de -1! ¡Es otra rotación, distinta a i y a j! Y no solo eso, sino que esta rotación no se puede expresar como un número de la forma ai + bj, por lo que realmente \*no se puede ubicar\* en este espacio 3D.

Resulta que k vive en otra parte, vive en una \*cuarta\* dimensión. k sería ortogonal al eje real, al eje i y al eje j al mismo tiempo Hamilton no podía crear un sistema 3D como planeaba, porque al hacerlo necesariamente tenía que introducir una cuarta dimensión. Este sistema tendría un eje real y tres ejes imaginarios asociados a las unidades i, j y k. Estos cuatro ejes serían todos ortogonales entre sí. Los números que habitan este sistema tendrían la forma a + bi + cj + dk, y a la hora de multiplicarse entre sí tendrían las siguientes reglas: i², j² y k² serían igual a -1, ij sería igual a k y ji sería igual a -k. De esto también podemos deducir que jk = i, kj = -i, ki = j e ik = -j. A estos números en 4 dimensiones les llamó \*”cuaterniones"\*. Estos números, a diferencia de los conjuntos anteriores como los reales o los complejos, no tienen un producto conmutativo, pero sí asociativo.

Y lo mejor de todo, es que estos números sí respetan la regla que Hamilton estuvo tratando de hacer cumplir todo este tiempo. Si definimos el módulo de un cuaternión a + bi + cj + dk como la raíz de a² + b² + c² + d², entonces sí se cumple que el módulo del producto entre dos cuaterniones, es igual al producto entre los módulos de cada cuaternión. No voy a mostrar el desarrollo porque es \*demasiado largo\*, pero esto es verdad. Esto es todo lo que buscaba Hamilton, su trabajo finalmente dio buenos frutos.

De manera similar que un número complejo lo separamos en una parte real y una parte imaginaria, Hamilton decidió descomponer los cuaterniones en partes reales y partes imaginarias. Pero a la parte real le llamó "parte escalar", y a la parte imaginaria le llamó... adivinen. "Parte vectorial". En su sistema, los números reales son conocidos como "escalares", que viene de "escalar" cosas, de estirarlas, comprimirlas o invertirlas, y cuando multiplican a un cuaternión hacen precisamente eso: escalarlo. Por otra parte, los números de la forma xi + yj + zk son conocidos como "vectores". "Vector" viene del latín y significa "el que carga" o "el que transporta", y en este caso lo que hace es llevar un cuaternión a otro, escalándolo pero también rotándolo en 90° en cierta dirección dentro de un hiperespacio de 4 dimensiones.

Y es aquí donde nacen los vectores que conocemos ahora. El nombre "vector" no es lo único que tienen en común. Quizás ya te diste cuenta, pero en los cuaterniones, los vectores están en términos de las unidades imaginarias i, j y k, mientras que los vectores modernos se expresan en términos de tres vectores unitarios i tongo, j tongo y k tongo.

Y bueno, todo muy bonito hasta ahora, pero todavía no hemos hablado nada del producto punto y del producto cruz. De eso se trataba este video, ¿o no? Pues bien, ahora vamos a eso.

En los cuaterniones, estos vectores pueden multiplicarse entre sí. Esta sería la multiplicación de toda la vida, excepto que ahora tenemos que considerar estas nueve reglas para resolver el producto entre las unidades i, j y k. Si la desarrollamos, aplicamos estas reglas y agrupamos los términos semejantes, obtenemos el siguiente cuaternión:

Ahora observa la parte escalar y la parte vectorial de este cuaternión. ¿Te suenan familiares?

La parte escalar se parece mucho al producto punto entre dos vectores, pero negativo. Y la parte vectorial es muy parecida al producto cruz entre vectores.

De hecho, es de aquí donde vienen ambos productos. La parte escalar es el opuesto de lo que ahora llamamos "producto punto" o "producto \*escalar\*" entre vectores, y la parte vectorial es lo que ahora llamamos "producto cruz" o "producto \*vectorial\*" entre vectores.

Y ahora es cuando varias cosas empiezan a tener sentido. Cuando definimos el producto punto como multiplicar dos vectores componente por componente y sumar todos los productos, parecía arbitrario y sacado de la nada, pero ahora parece tener sentido. Solo tenemos que decir que el producto punto de un vector unitario consigo mismo es igual a 1, y que el producto con otro vector ortogonal es 0, operar dos vectores con estas reglas, y llegamos a que es lo mismo que solo multiplicar componente por componente y sumar todo. Cuando definimos el producto cruz a partir de ciertas reglas con los vectores unitarios, que un vector unitario cruz consigo mismo era 0, que i x j = k, j x k = i, k x i = j, y el producto cruz era anticonmutativo, eso parecía todavía más arbitrario y más sacado de la nada, pero ahora parece tener \*algo\* de sentido. Con esta explicación, ya no se sienten \*tan\* raros. Todavía son medio raros, pero ya no tanto.

Pero todavía quedan varias preguntas al aire. ¿Por qué el producto punto también equivale a tomar los módulos de los vectores y multiplicarlos con el coseno del ángulo que forman? ¿Por qué el producto cruz, que se ve tan complicado, tiene un módulo igual al área del paralelogramo que

forman los dos factores, y por qué \*resulta\* ser \*perpendicular\* a ambos vectores? Esas preguntas las voy a tener que responder en el próximo video. Nos vemos pronto. Adiós.

// Nah, en verdad se pueden perfectamente explicar aquí mismo si acortas el guion. Agregar explicación.

// También agregar por qué el producto cruz sigue sin encajar bien. Esto lleva directamente al siguiente video: “El producto cruz es un IMPOSTOR – Por qué el PRODUCTO EXTERNO es superior”